

Exercice 01

Soit l'équation différentielle $(E) : y'' + 4y' + 4y = 2 - 4e^{-3t}$ d'inconnue $y \in C^2(\mathbb{R})$.

1. Prouver que y est solution de l'équation homogène associée (E_0) si et seulement si y est combinaison linéaire des fonctions $f: t \rightarrow e^{-2t}$ et $g: t \rightarrow te^{-2t}$ définies sur $\mathbb{R}$.
2. Chercher une solution particulière sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + 4y' + 4y = e^{-3t}$ sous la forme $t \rightarrow ae^{-3t}$.
3. Montrer que l'équation $y'' + 4y' + 4y = 2$ possède une trajectoire d'équilibre.
4. Déterminer l'ensemble des solutions $C^2(\mathbb{R})$ de l'équation différentielle (E) .
5. Déterminer les trajectoires convergentes de l'équation différentielle (E) .
6. Chercher la solution y de (E) qui passe par le point $A(0; 1)$ telle que $y'(0) = 0$.

(*) Exercice 02 – Extrait Edhec

On se propose de déterminer s'il existe des fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ et vérifiant l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1 + \int_0^x tf(x-t)dt \quad (*)$$

1. Montrer que l'égalité $(*)$ est équivalente à l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1 + \int_0^x (x-u)f(u)du \quad (**)$$

2. On suppose dans cette question qu'une fonction f , continue sur $\mathbb{R}$, est solution de ce problème.

- 2a. Justifier que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \int_0^x f(u)du$$

- 2b. En déduire que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = f(x)$$

- 2c. Trouver toutes les solutions de l'équation différentielle obtenue ci-dessus.

- 2d. Déterminer $f(0)$ et $f'(0)$ puis montrer que le problème posé au début de cet exercice a au plus une solution qui est la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

3. Vérifier qu'effectivement la fonction trouvée à la question 2d) est la seule solution du problème proposé en début d'exercice.

4. On se propose de déterminer maintenant s'il existe des fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ et vérifiant l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_0^x tf(x-t)dt$$

Sans refaire les calculs faits précédemment, mais en précisant les résultats qui restent valables, montrer que ce nouveau problème possède une seule solution que l'on déterminera.

Corrigé Exercice 01

Soit l'équation différentielle $(E) : y'' + 4y' + 4y = 2 - 4e^{-3t}$ d'inconnue $y \in C^2(\mathbb{R})$.

1. Prouver que y est solution de l'équation homogène associée (E_0) si et seulement si y est combinaison linéaire des fonctions $f: t \rightarrow e^{-2t}$ et $g: t \rightarrow te^{-2t}$ définies sur $\mathbb{R}$.

$(E_0) : y'' + 4y' + 4y = 0$ est d'équation caractéristique $x^2 + 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x + 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$.

Ainsi, les solutions de (E_0) sont les fonctions y_0 définies sur $\mathbb{R}$ de la forme

$$y_0(t) = (at + b)e^{-2t} \text{ où } (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

Ainsi y solution de (E_0) ssi il existe a et b réels tels que $y_0 = ag + bf$ (f et g de l'énoncé)
ssi y_0 est combinaison linéaire des fonctions f et g .

2. Chercher une solution particulière sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + 4y' + 4y = e^{-3t}$ sous la forme $t \rightarrow ae^{-3t}$.

Posons donc $y(t) = ae^{-3t}$: on a par conséquent $y'(t) = -3ae^{-3t}$
 $y''(t) = 9ae^{-3t}$

Alors y est solution de l'équation donnée ssi pour tout t on a $9ae^{-3t} - 12ae^{-3t} + 4ae^{-3t} = e^{-3t}$
ssi pour tout t on a $ae^{-3t} = e^{-3t}$
ssi $a = 1$

La fonction $y(t) = e^{-3t}$ est donc solution particulière de $y'' + 4y' + 4y = e^{-3t}$.

3. Montrer que l'équation $y'' + 4y' + 4y = 2$ possède une trajectoire d'équilibre. Une trajectoire d'équilibre de cette équation différentielle est une solution constante.

En proposant $y = k$, on obtient que l'équation admet une trajectoire d'équilibre donnée par $y(t) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ pour tout réel t .

4. Déterminer l'ensemble des solutions $C^2(\mathbb{R})$ de l'équation différentielle (E) .

- Une solution particulière de $y'' + 4y' + 4y = 2$ est $y_1(t) = \frac{1}{2}$ (Q3)
- Une solution particulière de $y'' + 4y' + 4y = e^{-3t}$ est $y_2(t) = e^{-3t}$ (Q2)

Par principe de superposition, une solution de $y'' + 4y' + 4y = 2 - 4e^{-3t}$ est donc $y_1 - 4y_2$: ainsi, une solution particulière de (E) est $y_p(t) = \frac{1}{2} - 4e^{-3t}$, pour tout réel t .

D'après Q1, les solutions de (E) sont donc les fonctions de la forme

$$y(t) = (at + b)e^{-2t} + \frac{1}{2} - 4e^{-3t}$$

où a et b sont deux réels quelconques.

5. Déterminer les trajectoires convergentes de l'équation différentielle (E) .

Toutes les trajectoires de (E) sont convergentes.

En effet,

- Pour tout réel a , $\lim_{t \rightarrow +\infty} ate^{-2t} = 0$ par croissances comparées
- Pour tout réel b , $\lim_{t \rightarrow +\infty} be^{-2t} - 4e^{-3t} = 0$ par somme de limites

Ainsi, pour toute solution y de (E) on a bien

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \frac{1}{2} \text{ (limite finie)}$$

6. Chercher la solution y de (E) qui passe par le point $A(0; 1)$ telle que $y'(0) = 0$.

On cherche deux réels a et b tels que $y(t) = (at + b)e^{-2t} + \frac{1}{2} - 4e^{-3t}$ vérifie $\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$.

Notons que $y'(t) = ae^{-2t} - 2(at + b)e^{-2t} + 12e^{-3t}$.

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b + 1/2 - 4 = 1 \\ a - 2b + 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 9/2 \\ a = -3 \end{cases}$$

La solution cherchée est donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = \left(-3t + \frac{9}{2}\right)e^{-2t} + \frac{1}{2} - 4e^{-3t}$$

Corrigé Exercice 02

On se propose de déterminer s'il existe des fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ et vérifiant l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1 + \int_0^x tf(x-t)dt \quad (*)$$

1. Montrer que l'égalité (*) est équivalente à l'égalité : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1 + \int_0^x (x-u)f(u)du$ (**)

Faisons le changement de variable ($u(t) =$) $u = x - t$ (affine donc licite) : $du = -dt$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = 1 + \int_0^x tf(x-t)dt = 1 - \int_x^0 (x-u)f(u)du = 1 + \int_0^x (x-u)f(u)du$$

2. On suppose dans cette question qu'une fonction f , continue sur $\mathbb{R}$, est solution de ce problème.

2a. Justifier que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que l'on a : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \int_0^x f(u)du$

Développons l'expression obtenue à la question précédente par linéarité de l'intégrale :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1 + \int_0^x (x-u)f(u)du = 1 + x \int_0^x f(u)du - \int_0^x uf(u)du$$

Méthode 1 (la plus claire je trouve)

Soit F une primitive de f , G une primitive de $g: x \rightarrow xf(x)$ (ces deux fonctions f et g étant continues, F et G existent et sont même C^1 d'après le cours) :

Ainsi,

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + x \int_0^x f(u)du - \int_0^x uf(u)du \\ &= 1 + x(F(x) - F(0)) - (G(x) - G(0)) \end{aligned}$$

Par somme de fonctions C^1 , f est C^1 et en dérivant on obtient :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1(F(x) - F(0)) + xF'(x) - G'(x) \\ &= \int_0^x f(u)du + xf(x) - xf(x) \\ &= \int_0^x f(u)du \end{aligned}$$

Méthode 2. D'après le cours :

- Comme f est supposée continue sur $\mathbb{R}$ alors la fonction $F: x \mapsto \int_0^x f(u)du$ est C^1 sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée $f(x)$: en effet, c'est par définition la primitive de f qui s'annule en 0.
- La fonction $x \mapsto xf(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ par produit, donc la fonction $G: x \mapsto \int_0^x uf(u)du$ est C^1 sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée $xf(x)$ pour la même raison que précédemment.
- On en déduit que f est C^1 sur $\mathbb{R}$ et :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) &= \int_0^x f(u)du + x \left(\int_0^x f(u)du \right)' - \left(\int_0^x uf(u)du \right)' = \int_0^x f(u)du + xf(x) - xf(x) \\ &= \int_0^x f(u)du \end{aligned}$$

2b. En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et que l'on a : $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = f(x)$

Mêmes arguments que précédemment : d'après Q2a, la fonction f' est définie comme la primitive qui s'annule en 0 de la fonction continue f . Donc f' est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Autrement dit, f est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = \left(\int_0^x f(u) du \right)' = (F(x) - F(0))' = F'(x) = f(x)$$

2c. Trouver toutes les solutions de l'équation différentielle obtenue ci-dessus.

Notons $(E): y'' = y$ l'équation différentielle de la question précédente. On reconnaît une équation différentielle linéaire d'ordre 2.

Cette équation a pour équation caractéristique $x^2 - 1 = 0$ dont les racines sont données par 1 et -1.

D'après le cours, les solutions de (E) sont de la forme :

$$x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{-x} \text{ avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

2d. Déterminer $f(0)$ et $f'(0)$ puis montrer que le problème posé au début de cet exercice a au plus une solution qui est la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

Commençons par déterminer $f(0)$ et $f'(1)$.

- Par définition de f , pour tout x , $f(x) = 1 + \int_0^x tf(x-t)dt$: donc $f(0) = 1 + \int_0^0 tf(-t)dt = 1$.
- De même, d'après Q2a, on a $f'(0) = \int_0^0 f(u)du = 0$.

D'après la question précédente, f peut s'écrire $f(x) = \lambda e^x + \mu e^{-x}$ où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

On a donc, en remplaçant $f(0)$ et $f'(0)$ par leurs expressions : $\begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \lambda - \mu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \lambda = \mu = \frac{1}{2}$

Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

3. Vérifier qu'effectivement la fonction trouvée à la question 2d) est la seule solution du problème proposé en début d'exercice.

Ainsi, nous venons de prouver à travers ces questions, que si f était une fonction continue solution du problème (*) alors $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Vérifions maintenant la réciproque, c'est-à-dire que la fonction f trouvée est effectivement solution du problème (*).

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} 1 + \int_0^x tf(x-t)dt &= 1 + \int_0^x t \frac{e^{x-t} + e^{-x+t}}{2} dt \\ &= 1 + \frac{e^x}{2} \int_0^x te^{-t} dt + \frac{e^{-x}}{2} \int_0^x te^t dt \end{aligned}$$

Calculons les intégrales de l'expression précédente.

- Posons $\begin{cases} u(t) = t \\ v'(t) = e^{-t} \end{cases}$ de sorte que $\begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = -e^{-t} \end{cases}$: u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et d'après la formule d'intégration par parties, on a alors :

$$\int_0^x te^{-t} dt = [-te^{-t}]_0^x + \int_0^x e^{-t} dt = -xe^{-x} + [-e^{-t}]_0^x = -(x+1)e^{-x} + 1$$

- On peut, en procédant de la même manière, montrer que :

$$\int_0^1 te^t dt = (x-1)e^x + 1$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
1 + \int_0^x tf(x-t)dt &= 1 + \frac{e^x}{2}(-(x+1)e^{-x} + 1) + \frac{e^{-x}}{2}((x-1)e^x + 1) \\
&= 1 + \frac{-(x+1)}{2} + \frac{(x-1)}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\
&= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

L'égalité a bien été vérifiée.

4. On se propose de déterminer maintenant s'il existe des fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ et vérifiant l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_0^x tf(x-t)dt$$

Sans refaire les calculs faits précédemment, mais en précisant les résultats qui restent valables, montrer que ce nouveau problème possède une seule solution que l'on déterminera.

Entre cette question et la question Q1, la fonction f diffère d'une constante. Cela implique que l'on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \int_0^x f(u)du \text{ et } f''(x) = f(x)$$

Ainsi, f est solution de l'équation différentielle (E) et s'écrit donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lambda e^x + \mu e^{-x} \text{ avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

Ici les conditions initiales sont données par $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$.

Les coefficients λ et μ doivent donc vérifier le système: $\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda - \mu = 0 \end{cases}$

On a donc $\lambda = \mu = 0$.

Ainsi, l'unique solution (possible) de cette équation est donnée par $f = 0$ (et elle est effectivement solution).