(*) QUESTION DE CONCOURS *(EDHEC)*

Soit f une fonction définie et strictement positive sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) \underset{0^+}{\sim} x$.

À l'aide de la définition d'équivalent, montrer que $\ln(f(x)) \underset{0^+}{\sim} \ln x$.

EXERCICE

PARTIE 1.

Un sac contient 2 billes jaunes et 2 billes bleues. On effectue une succession de tirages selon le procédé suivant :

- À chaque étape, on pioche deux billes dans le sac.
- Si les deux billes obtenues sont de même couleur, on les met de côté.
- Si elles sont de couleurs différentes, on les remet dans le sac.

On joue jusqu'à avoir vidé le sac.

Pour $j \in \mathbb{N}^*$ on note $D_j =$ « les deux billes obtenues au $j^{ème}$ tirage sont de couleurs différentes ».
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de pioches effectuées lorsqu'on a vidé le sac.

1. Démontrer que $P(D_1) = \frac{2}{3}$.

2. Déterminer la loi de la variable aléatoire X et vérifier que pour tout entier $k \geq 3$, $P(X = k) = \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2} \times \frac{1}{3}$.
On pourra au préalable exprimer l'évènement $(X = k)$ à l'aide des $\left(D_j\right)_{j\geq 1}$.

3. On pose $Z = X - 1$. Déterminer la loi de Z et en déduire que X admet une espérance et une variance que l'on déterminera.

PARTIE 2.

On suppose désormais que le cas contient au départ deux billes jaunes, deux billes bleues et deux billes rouges.
On conserve le même mode de tirage : on pioche simultanément deux billes avec remise si elles sont de couleurs différentes, sans remise sinon.
Pour $j \in \mathbb{N}^*$ on note $D_j =$ « les deux billes obtenues au $j^{ème}$ tirage sont de couleurs différentes ».
Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de pioches effectuées lorsqu'on a vidé le sac.

4. Montrer que $P(D_1) = \frac{4}{5}$.

5a. Déterminer le support de la variable aléatoire Y.

5b. Exprimer $(Y = 3)$ à l'aide des $\left(D_j\right)_{j\geq 1}$ et en déduire $P(Y = 3)$.

5c. Déterminer $P_{D_1}(Y = k + 1)$ et $P_{\overline{D_1}}(Y = k + 1)$ et en déduire que pour tout entier $k \geq 3$ on a

$$P(Y = k + 1) = \frac{1}{5}P(X = k) + \frac{4}{5}P(Y = k)$$

5d. En déduire que $\forall k \geq 3$,

$$P(Y = k) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{4}{5}\right)^{k-2} - \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2}\right)$$

6. Montrer que Y admet une espérance et la calculer.

CORRIGÉ : QUESTION DE CONCOURS *(EDHEC)*

Soit f une fonction définie et strictement positive sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) \underset{0^+}{\sim} x$.

À l'aide de la définition d'équivalent, montrer que $\ln(f(x)) \underset{0^+}{\sim} \ln x$.

Par définition de la notion d'équivalent, $f(x) \underset{0^+}{\sim} x$ donc il existe une fonction ε définie au voisinage de 0^+, qui tend vers 0 en 0^+, telle que dans ce voisinage

$$f(x) = x + x\varepsilon(x) = x\big(1 + \varepsilon(x)\big)$$

Ainsi, toujours au voisinage de 0^+, par propriété du logarithme,

$$\ln\big(f(x)\big) = \ln\Big(x\big(1 + \varepsilon(x)\big)\Big) = \ln x + \ln\big(1 + \varepsilon(x)\big)$$

d'où

$$\frac{\ln\big(f(x)\big)}{\ln x} = 1 + \frac{\ln\big(1 + \varepsilon(x)\big)}{\ln x}$$

Faisons tendre x vers 0^+ : comme par définition $\varepsilon(x) \to 0$ on obtient par quotient de limites

$$\frac{\ln\big(f(x)\big)}{\ln x} \to 1$$

CORRIGÉ EXERCICE

PARTIE 1.

Un sac contient 2 billes jaunes et 2 billes bleues. On effectue une succession de tirages selon le procédé suivant :

- À chaque étape, on pioche deux billes dans le sac.
- Si les deux billes obtenues sont de même couleur, on les met de côté.
- Si elles sont de couleurs différentes, on les remet dans le sac.

On joue jusqu'à avoir vidé le sac.

Pour $j \in \mathbb{N}^*$ on note D_j = « les deux billes obtenues au $j^{ème}$ tirage sont de couleurs différentes ».
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de pioches effectuées lorsqu'on a vidé le sac.

1. Démontrer que $P(D_1) = \frac{2}{3}$.

- Notons qu'il y a $\binom{4}{2}$ façons de piocher simultanément deux billes parmi 4 billes.
- $\overline{D_1}$ signifie que lors du premier tirage, on a pioché deux billes de même couleur, donc deux jaunes **ou** deux bleues. Ces évènements étant incompatibles on obtient que $p(\overline{D_1}) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{4}{2}} + \frac{\binom{2}{2}}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$
- Ainsi, $P(D_1) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

2. Déterminer la loi de la variable aléatoire X et vérifier que pour tout entier $k \geq 3$, $P(X = k) = \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2} \times \frac{1}{3}$.
On pourra au préalable exprimer l'évènement $(X = k)$ à l'aide des $(D_j)_{j\geq 1}$.

- $X(\Omega) = [\![2; +\infty[\![$ car il faut au minimum deux tirages pour vider le sac de 4 billes.
- $(X = 2) = \overline{D_1} \cap \overline{D_2}$ donc $P(X = 2) = P(\overline{D_1})P_{\overline{D_1}}(\overline{D_2}) = \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}$ car si $\overline{D_1}$ est réalisé, il reste deux billes de même couleur dans le sac donc l'évènement $\overline{D_2}$ est certain.
- Soit un entier $k \geq 3$: $(X = k) = D_1 \cap D_2 \cap \ldots \cap D_{k-2} \cap \overline{D_{k-1}} \cap \overline{D_k}$: la formule des probabilités composées donne alors :

$$P(X = k) = P(D_1)P_{D_1}(D_2) \ldots P_{D_1 \cap \ldots \cap D_{k-3}}(D_{k-2})P_{D_1 \cap \ldots \cap D_{k-2}}(\overline{D_{k-1}})P_{D_1 \cap D_2 \cap \ldots \cap D_{k-2} \cap \overline{D_{k-1}}}(\overline{D_k})$$
$$= \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2} \times \frac{1}{3} \times 1$$

On remarque au passage que cette formule reste valable pour $k = 2$.

3. On pose $Z = X - 1$. Déterminer la loi de Z et en déduire que X admet une espérance et une variance que l'on déterminera.

- D'après Q2, $Z(\Omega) = [\![1; +\infty[\![$ et pour tout entier $k \geq 1$,
$$P(Z = k) = P(X - 1 = k) = P(X = k + 1) = \left(\frac{2}{3}\right)^{k+1-2} \times \frac{1}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \times \frac{1}{3}$$
Ainsi, $Z \hookrightarrow \mathrm{G}\left(\frac{1}{3}\right)$.
- Z admet donc une espérance et une variance : $E(Z) = \frac{1}{p} = 3$ et $V(Z) = \frac{1-p}{p^2} = 6$
- De même pour $X = Z + 1$ et on trouve que $E(X) = E(Z) + 1 = 4$; $V(X) = V(Z) = 6$

PARTIE 2.

On suppose désormais que le cas contient au départ deux billes jaunes, deux billes bleues et deux billes rouges.
On conserve le même mode de tirage : on pioche simultanément deux billes avec remise si elles sont de couleurs différentes, sans remise sinon.
Pour $j \in \mathbb{N}^*$ on note D_j = « les deux billes obtenues au $j^{ème}$ tirage sont de couleurs différentes ».
Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de pioches effectuées lorsqu'on a vidé le sac.

4. Montrer que $P(D_1) = \frac{4}{5}$ .Suivant le même raisonnement qu'en question 1, on trouve que
$$p(\overline{D_1}) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{6}{2}} + \frac{\binom{2}{2}}{\binom{6}{2}} + \frac{\binom{2}{2}}{\binom{6}{2}} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5} \quad \text{d'où le résultat}$$

5a. Déterminer le support de la variable aléatoire Y.
$Y(\Omega) = [\![3; +\infty[\![$ car il faut au minimum trois tirages pour vider le sac de 6 billes.

5b. Exprimer $(Y = 3)$ à l'aide des $(D_j)_{j\geq 1}$ et en déduire $P(Y = 3)$.

$(Y = 3) = \overline{D_1} \cap \overline{D_2} \cap \overline{D_3}$ donc $P(Y = 3) = P(\overline{D_1})P_{\overline{D_1}}(\overline{D_2})P_{\overline{D_1}\cap\overline{D_2}}(\overline{D_3}) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{15}$. En effet,

- Si $\overline{D_1}$ est réalisé, il reste 4 billes dans le sac (deux couples de même couleur), et on revient donc dans la situation de la partie 1 : $P_{\overline{D_1}}(\overline{D_2}) = P(\text{piocher deux billes de même couleur}) = \frac{1}{3}$
- si $\overline{D_1} \cap \overline{D_2}$ est réalisé, il reste deux billes de même couleur dans le sac donc l'évènement $\overline{D_3}$ est certain.

5c. Déterminer $P_{D_1}(Y = k + 1)$ et $P_{\overline{D_1}}(Y = k + 1)$ et en déduire que pour tout entier $k \geq 3$ on a
$$P(Y = k + 1) = \frac{1}{5}P(X = k) + \frac{4}{5}P(Y = k)$$

- si D_1 est réalisé, on a remis l'urne à son état initial puisque l'on vient de piocher deux billes de couleurs différentes. Vu qu'un tirage a été effectué on obtient $P_{D_1}(Y = k + 1) = P(Y = k)$.
- si D_1 n'est pas réalisé, on vient de piocher deux billes de même couleur, on ne les remet donc pas dans l'urne. L'urne contient donc deux billes d'une couleur, deux d'une autre. Il s'agit de la situation dans l'étape 1 de cet exercice : on obtient ainsi $P_{\overline{D_1}}(Y = k + 1) = P(X = k)$.
- À l'aide du sce $(D_1, \overline{D_1})$ et de la formule des probabilités totales on obtient donc
$$P(Y = k + 1) = P(\overline{D_1})P_{\overline{D_1}}(Y = k + 1) + P(D_1)P_{D_1}(Y = k + 1)$$
$$= \frac{1}{5}P(X = k) + \frac{4}{5}P(Y = k)$$

5d. En déduire que $\forall k \geq 3, P(Y=k) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{4}{5}\right)^{k-2} - \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2}\right)$.

Menons une récurrence. Soit $P(k)$: « $P(Y=k) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{4}{5}\right)^{k-2} - \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2}\right)$ » pour $k \geq 3$:

- $P(Y=3) = \frac{1}{15}$ et $\frac{1}{2}\left(\left(\frac{4}{5}\right)^{3-2} - \left(\frac{2}{3}\right)^{3-2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5} - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{15} = \frac{1}{15}$ donc $P(3)$ est vraie.
- Supposons que pour un rang $k \geq 3$ on ait $P(Y=k) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{4}{5}\right)^{k-2} - \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2}\right)$. Alors,

$$P(Y=k+1) = \frac{1}{5}P(X=k) + \frac{4}{5}P(Y=k) \quad d'après\ 5c$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-2} \times \frac{1}{3} + \frac{4}{5}\left(\frac{1}{2}\left(\left(\frac{4}{5}\right)^{k-2} - \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2}\right)\right) \quad d'après\ partie\ 1\ et\ H.R$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2}\left(\frac{1}{15} - \frac{2}{5}\right) + \left(\frac{4}{5}\right)^{k-2} \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{2}$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2} \times \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1} - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$$

L'hérédité est prouvée.

6. Montrer que Y admet une espérance et la calculer. La convergence absolue de la série $\sum_{k\geq 3} kP(Y=k)$ équivaut à sa convergence (terme général positif). Par ailleurs,

$$kP(Y=k) = \frac{1}{2}\left(k\left(\frac{4}{5}\right)^{k-2} - k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{4}k\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1} - \frac{3}{2}k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\right)$$

On reconnait les termes généraux de deux séries géométriques dérivée convergentes ($|x| < 1$) donc Y admet une espérance, et on a

$$E(Y) = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{4}\left(\frac{1}{\left(1-\frac{4}{5}\right)^2} - \frac{8}{5} - 1\right) - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{\left(1-\frac{2}{3}\right)^2} - \frac{4}{3} - 1\right)\right) = 9$$