DEVOIR SURVEILLÉ 01
ECG1 – MATHS APPLIQUÉES

Durée : 3h | Calculatrice interdite
Vendredi 06 septembre 2024

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats ne doivent faire l'usage d'aucun document :
seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE 01

Les sept questions sont indépendantes les unes des autres.

1. Développer les expressions suivantes, pour tout réel x :

$$p(x) = (3x-2)^2 + (2x-1)(x+3) \qquad q(x) = (-2x+1)^2 - 2(x-3)(2x+1)$$

2. Sachant que $e \approx 2.7$, donner le signe de $\ln 2 - 0.5$, en justifiant votre réponse.

3. Soit a et b deux réels tels que : $-3 \leq a \leq 1$ et $1 \leq b \leq 2$.
Encadrer au mieux les nombres suivants : a^2 puis $a - 2b$.

4. Simplifier les expressions suivantes :

$$A = e^{3\ln 2 - 2\ln 3} \quad ; \quad B = \frac{\ln 8 + 2\ln 2}{\ln 2} \quad ; \quad C = \frac{(e^{3x})^2}{e^{5x}} \times (e^{-x})^2$$

5. Résoudre sur leur domaine les inéquations suivantes :

A. $x^2 \leq 6$ **B.** $\frac{x-2}{3-4x} < 2$
C. $x + 2 < \frac{3}{x+2}$ **D.** $3 - 2\ln x \leq 2$

6. Nier de manière précise (avec quantificateurs par exemple) les propositions suivantes :

- *Soit* $\mathcal{P}_1 : \exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq M$
- *Soit* $x \in \mathbb{R}$. $\mathcal{P}_2 : x \in]2;6]$
- $\mathcal{P}_3$: "*piocher un roi ou un coeur*"
- $\mathcal{P}_4$: "*la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est positive*"

7. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 2^n \geq n + 1$$

EXERCICE 02

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel *n*, $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$.

1. Calculer les termes u_1, u_2 et u_3.

2a. Démontrer que pour tout entier naturel *n*, $u_n \leq n + 3$.

2b. Démontrer que pour tout entier naturel *n*, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n)$.

2c. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

3. On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$.

3a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

3b. En déduire que pour tout entier naturel *n*, $u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$.

3c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 03

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}} .$$

1. Démontrer que, pour tout réel x positif ou nul, $e^{-x} \leq e^x$.

2a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

2b. Étudier les variations de f sur $[0; +\infty[$.

3. On considère les fonctions g et h définies sur [0 ; +∞[par $g(x) = \frac{1}{e^x}$ et $h(x) = \frac{1}{2e^x}$.

3a. Démontrer que, pour tout réel x positif ou nul, $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$.

3b. Préciser une équation de la tangente (T) à la courbe représentant f au point d'abscisse 0.

ELÉMENTS DE CORRECTION

CORRIGÉ EXERCICE 01

1. Développer les expressions suivantes :

$p(x) = (3x-2)^2 + (2x-1)(x+3)$ $\qquad$ $q(x) = (-2x+1)^2 - 2(x-3)(2x+1)$

Voici les calculs demandés :

- $p(x) = (9x^2 + 4 - 12x) + (2x^2 + 5x - 3)$
  $= 11x^2 - 7x + 1$
- $q(x) = (4x^2 + 1 - 4x) - 2(2x^2 - 5x - 3)$
  $= 6x + 7$

2. Sachant que $e \approx 2.7$, donner le signe de $\ln 2 - 0.5$, en justifiant votre réponse.

Notons $A = \ln 2 - 0.5$:

$A = \ln 2 - \frac{1}{2} = \ln 2 - \frac{1}{2}\ln e$ $\quad$ puisque $\ln e = 1$

$A = \ln 2 - \ln\sqrt{e}$ $\quad$ puisque $n\ln a = \ln(a^n)$ pour tout rationnel n, et qu'on sait que $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$

$A = \ln\left(\frac{2}{\sqrt{e}}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{e}}\right)$ $\quad$ puisque $\ln a - \ln b = \ln\frac{a}{b}$

$A = \ln\left(\sqrt{\frac{4}{e}}\right)$ $\quad$ puisque $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ (même règle que pour les puissances)

Enfin, $A = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{4}{e}\right)$ $\quad$ puisque $\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a$

Puisque $e \approx 2.7$ alors $\frac{4}{e} > 1$ et comme la fonction ln est croissante, on a bien $A = \frac{1}{2}\ln\frac{4}{e} > \frac{1}{2}\ln 1 = 0$: $A > 0$

Méthode 2.

On a $\ln 2 - 0.5 > 0 \Leftrightarrow \ln 2 > 0.5 \Leftrightarrow 2 > e^{0.5}$ puisque l'exponentielle est croissante strictement.
Ainsi : $\ln 2 - 0.5 > 0 \Leftrightarrow 4 > e^1$ en passant au carré, les quantités en jeu étant positives.
Cette dernière égalité étant vraie, on obtient le résultat voulue.

3. Soit a et b deux réels tels que : $-3 \leq a \leq 1$ et $1 \leq b \leq 2$.
Encadrer au mieux les nombres suivants : a^2 puis $a - 2b$.

- Attention, la fonction carré n'est pas croissante sur $[-3; 1]$. On peut juste affirmer que
  si $\quad -3 \leq a \leq 1$
  alors $\quad 0 \leq a^2 \leq 9$.
  La représentation graphique de la fonction carré permet de justifier rapidement ce résultat.

- Attention, on ne peut pas soustraire des inégalités, la stratégie est la suivante : multiplier par -2 et ajouter.
  On a $\begin{cases} -3 \leq a \leq 1 \\ 1 \leq b \leq 2 \end{cases}$ càd $\begin{cases} -3 \leq a \leq 1 \\ -4 \leq -2b \leq -2 \end{cases}$
  puis on peut additionner des inégalités rangées dans le même sens,
  ce qui donne :
  $$-7 \leq a - 2b \leq -1$$

4. Simplifier les expressions suivantes :

$$A = e^{3\ln 2 - 2\ln 3} \quad ; \quad B = \frac{\ln 8 + 2\ln 2}{\ln 2} \quad ; \quad C = \frac{(e^{3x})^2}{e^{5x}} \times (e^{-x})^2$$

On a :

- $A = e^{3\ln 2 - 2\ln 3} = e^{\ln 8 - \ln 9} = e^{\ln\left(\frac{8}{9}\right)} = \frac{8}{9}$
- $B = \frac{\ln 8 + 2\ln 2}{\ln 2} = \frac{\ln 2^3 + 2\ln 2}{\ln 2} = \frac{3\ln 2 + 2\ln 2}{\ln 2} = \frac{(3+2)\ln 2}{\ln 2} = 5$
- $C = \frac{(e^{3x})^2}{e^{5x}} \times (e^{-x})^2 = \frac{e^{6x} \times e^{-2x}}{e^{5x}} = e^{-x}$

5. Résoudre sur leur domaine les inéquations suivantes :

A. $x^2 \leq 6$ **B.** $\frac{x-2}{3-4x} < 2$ **C.** $x+2 < \frac{3}{x+2}$ **D.** $3 - 2\ln x \leq 2$

5A. $x^2 \leq 6 \Leftrightarrow x^2 - 6 \leq 0$: on reconnait un trinôme de racines $-\sqrt{6}$ et $\sqrt{6}$, de coefficient dominant positif. Il est donc négatif entre ses racines. $S = [-\sqrt{6}; \sqrt{6}]$.

5B. $\frac{x-2}{3-4x} < 2 \Leftrightarrow \frac{x-2}{3-4x} - 2 < 0 \Leftrightarrow \frac{x-2}{3-4x} - \frac{2(3-4x)}{3-4x} < 0 \Leftrightarrow \frac{9x-8}{3-4x} < 0$: on pourrait à ce stade dresser un tableau de signes, mais en remarquant que le signe d'un quotient est le même que celui d'un produit, l'étude du signe du trinôme $(9x-8)(3-4x)$ suffit.
Il est de racines évidentes $\frac{8}{9}$ et $\frac{3}{4}$, de coefficient dominant négatif donc $S =]-\infty; 3/4[\cup]8/9; +\infty[$

Remarque : $\frac{8}{9} = \frac{32}{36}$ et $\frac{3}{4} = \frac{27}{36}$ donc $\frac{3}{4} < \frac{8}{9}$.

5C. $x+2 < \frac{3}{x+2} \Leftrightarrow x+2 - \frac{3}{x+2} < 0 \Leftrightarrow \frac{(x+2)^2-3}{x+2} < 0 \Leftrightarrow \frac{(x+2-\sqrt{3})(x+2+\sqrt{3})}{x+2} < 0$: un tableau de signes semble ici indispensable. Notez que le numérateur est un trinôme de racines $-2+\sqrt{3}$ et $-2-\sqrt{3}$, de coefficient dominant positif.

x	-∞ $-2-\sqrt{3}$ -2 $-2+\sqrt{3}$ +∞
$(x+2)^2-3$	+ 0 - | - 0 +
$x+2$	- | - 0 + | +
$\frac{(x+2)^2-3}{x+2}$	- 0 + ‖ - 0 +

$S =]-\infty; -2-\sqrt{3}[\cup]-2; -2+\sqrt{3}[$

5C. $3 - 2\ln x \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq 2\ln x \Leftrightarrow \ln x \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \geq e^{\frac{1}{2}}$ par croissance de la fonction exp.

6. Nier de manière précise (avec quantificateurs par exemple) les propositions suivantes :

- *Soit* $\mathcal{P}_1 : \exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \ u_n \leq M$
- *Soit* $x \in \mathbb{R}$. $\mathcal{P}_2 : x \in]2;6]$
- $\mathcal{P}_3$: "*piocher un roi ou un coeur*"
- $\mathcal{P}_4$: "*la suite* (u_n) *est positive*"

- $non(\mathcal{P}_1) : \forall M \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}$ tq $u_n > M$: la suite (u_n) est non majorée
- $\mathcal{P}_2$ s'écrit "$x > 2$ *et* $x \leq 6$" donc $non(\mathcal{P}_2)$: "$x \leq 2$ *ou* $x > 6$" càd $x \in]-\infty; 2] \cup]6; +\infty[$
- $non(\mathcal{P}_3)$: « ne pas piocher un roi **et** ne pas piocher un cœur »
- $\mathcal{P}_4$ s'écrit "$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$" donc $non(\mathcal{P}_4)$: "$\exists n \in \mathbb{N}, u_n < 0$"

7. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \ 2^n \geq n + 1$.
Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition « $2^n \geq n + 1$ » pour $n \in \mathbb{N}$:

- $2^0 = 1$ et $1 \geq 0 + 1$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Soit n un entier tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie, càd tel que on ait

$2^n \geq n + 1$
Donc $2^{n+1} \geq 2n + 2$ (car $2 \times 2^n = 2^{n+1}$).
Mais $2n + 2 \geq n + 2$ (puisque $n \geq 0$)
Donc au final $2^{n+1} \geq (n+1) + 1$

On a donc prouvé que $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$

- On a bien $\mathcal{P}(n)$ vraie pour tout entier naturel n.

CORRIGÉ EXERCICE 02

Soit la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $\quad u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$.

1a. Calculer u_1, u_2, u_3. On obtient $u_1 = \frac{2}{3} \times 2 + 0 \times \frac{1}{3} + 1 = \frac{7}{3}$; $u_2 = \cdots = \frac{14}{9} + \frac{3}{9} + \frac{9}{9} = \frac{26}{9}$; $u_3 = \cdots = \frac{97}{27}$.

2a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \leq n + 3$.
Procédons par récurrence et notons $P(n)$ la propriété : « $u_n \leq n + 3$ » où $n \in \mathbb{N}$.

- Puisque l'on a $u_0 = 2$, on vérifie bien que $u_n \leq 0 + 3$: $P(0)$ est donc vraie.
- Soit n un entier tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie, càd tel que

  $u_n \leq n + 3$.

  Par conséquent : $\quad \frac{2}{3}u_n \leq \frac{2}{3}(n + 3)$

  Càd $\quad \frac{2}{3}u_n \leq \frac{2}{3}n + 2$

  On en déduit que : $\quad \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 \leq \frac{2}{3}n + 2 + \frac{1}{3}n + 1$:

  Càd $\quad u_{n+1} \leq \mathrm{n} + 3 \leq n + 4$

  Ainsi, $P(n + 1)$ est vraie.

- La propriété est vraie pour $n = 0$ et elle est héréditaire : elle est donc vraie pour tout entier naturel n.

2b. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n)$. On a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - u_n = -\frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3}n + \frac{3}{3} = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n)$$

2c. En déduire le sens de variation de la suite (u_n). Comme on l'a montré à la question précédente, pour tout n naturel, on a $u_n \leq n + 3$ ce qui équivaut à dire que $n + 3 - u_n$ est positive et donc que $u_{n+1} - u_n \geq 0$: la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

3. On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$.

3a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.
Exprimons v_{n+1} en fonction de v_n :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - (n + 1) = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - n - 1$$
$$= \frac{2}{3}u_n - \frac{2}{3}n = \frac{2}{3}(u_n - n)$$

Donc $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$: la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q = \frac{2}{3}$, de premier terme $v_0 = u_0 - 0 = 2$.

3b. En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$.

On déduit du 3a que $v_n = v_0 \times q^n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Comme pour tout n, $v_n = u_n - n$, on obtient $u_n = v_n + n = u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$.

3c. Déterminer la limite de la suite (u_n).
Puisque la raison q vérifie $-1 < q < 1$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et par somme de limites, on trouve $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

CORRIGÉ EXERCICE 03

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{e^x+e^{-x}}$.

1. Démontrer que, pour tout réel x positif ou nul, $e^{-x}\le e^x$. Pour tout $x\ge 0$, $-x\le x$ donc par croissance de la fonction exp on a $e^{-x}\le e^x$.

2a. Déterminer la limite de f en $+\infty$. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x+e^{-x}\right)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x+e^{-x}}=0$ par quotient. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

2b. Étudier les variations de f sur $[0;+\infty[$. f est de la forme $f=\frac{1}{v}$ avec $v(x)=e^x+e^{-x}$ dérivable et ne s'annulant pas sur $[0;+\infty[$, donc *f* est dérivable sur $[0;+\infty[$ et $f'=-\frac{v'}{v^2}$. Par conséquent :

$$f'(x)=-\frac{e^x-e^{-x}}{\left(e^x+e^{-x}\right)^2}=\frac{e^{-x}-e^x}{\left(e^x+e^{-x}\right)^2}.$$

D'après la question 1 : si $x\ge 0$, alors $e^{-x}\le e^x$; donc $f'(x)\le 0$, pour tout $x\ge 0$:
f est donc décroissante sur $[0;+\infty[$.

3. On considère les fonctions g et h définies sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x)=\frac{1}{e^x}$ et $h(x)=\frac{1}{2e^x}$.
3a. Démontrer que, pour tout réel x positif ou nul, $h(x)\le f(x)\le g(x)$.

- Pour tout x, $0<e^{-x}$
  donc $e^x\le e^x+e^{-x}$ en ajoutant e^x à chaque membre
- D'après Q1, pour $x\ge 0$,
  $e^{-x}\le e^x$
  donc $e^x+e^{-x}\le 2e^x$ en ajoutant e^x à chaque membre,.

Ainsi, $0<e^x\le e^x+e^{-x}\le 2e^x$ et par décroissance de la fonction inverse sur $]0;+\infty[$,
$\frac{1}{e^x}\ge\frac{1}{e^x+e^{-x}}\ge\frac{1}{2e^x}>0$.

On a donc bien *h*(*x*) ≤ *f*(*x*) ≤ *g*(*x*), pour tout réel *x* positif ou nul.

Remarque : par le même raisonnement, on peut traiter la totalité de l'encadrement directement.

3b. Préciser une équation de la tangente (T) à Γ au point d'abscisse 0.

On a $f'(0)=0$, donc la tangente (T) à Γ au point d'abscisse 0 est parallèle à l'axe des abscisses et a pour équation : $y=f(0)$, soit
$(T)\ :\ y=\frac{1}{2}$.

Rappel : équation de la tangente au point d'abscisse a
$$T_a:\ y=f(a)+f'(a)\,(x-a)$$