

# DEVOIR SURVEILLÉ 01 – ECS1

Durée : 3h

Calculatrice interdite.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire l'usage d'aucun document : seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

## EXERCICE 01

1a. Déterminer le signe du trinôme  $-8m^2 + 8m + 16$  de variable réelle  $m$ .

1b. Déterminer les valeurs du réel  $m$  pour lesquelles l'équation  $mx^2 + 4x + 2(m - 1) = 0$  d'inconnue  $x$  a au moins une solution.

2. Soit  $a$  et  $b$  deux réels tels que :  $-3 \leq a \leq 2$  et  $1 \leq b \leq 5$ .

Encadrer au mieux les nombres suivants :  $a^2$ ,  $a - 2b$  puis  $\frac{a^2}{b}$ .

3. Simplifier au maximum les nombres suivants :

$$A = e^{-\ln 3} \quad ; \quad B = \frac{\ln 12 - \ln 6}{\ln 4}$$

4. Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}(n + 3 + u_n) \end{cases}$ .

4a. Montrer que la suite  $(v_n)$  définie par  $v_n = u_n - n - 1$  est une suite géométrique dont on donnera la raison.

4b. En déduire une expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .

4c. Exprimer d'une manière simple en fonction de l'entier naturel  $n$  la somme

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k$$

5. Résoudre sur leur domaine les inéquations suivantes :

$$\text{A. } x^2 \leq 3x \quad \text{B. } \frac{5x-5}{3-4x} \geq 1 \quad \text{C. } x - 1 < \frac{8}{x-1}$$

6. Dresser le **tableau de variations** complet des deux fonctions suivantes sur leur domaine de définition.

Justifier précisément les limites des fonctions aux bornes de ces domaines.

$$f(x) = xe^{-2x} \text{ sur } \mathbb{R} \quad g(x) = \frac{\ln x}{x} \text{ sur } ]0; +\infty[$$

## EXERCICE 02

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$ .

1. Démontrer que, pour tout réel  $x$  positif ou nul,  $e^{-x} \leq e^x$ .
- 2a. Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
- 2b. Étudier les variations de  $f$  sur  $[0; +\infty[$ .
3. On considère les fonctions  $g$  et  $h$  définies sur  $[0; +\infty[$  par  $g(x) = \frac{1}{e^x}$  et  $h(x) = \frac{1}{2e^x}$ .
- 3a. Démontrer que, pour tout réel  $x$  positif ou nul,  $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ .
- 3b. Préciser une équation de la tangente  $(T)$  à la courbe représentant  $f$  au point d'abscisse 0.

## EXERCICE 03

On considère la suite définie, pour tout entier naturel non nul, par

$$s_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k(k+1)}$$

1. Calculer et simplifier  $s_1, s_2$  et  $s_3$ .
2. Étudier les variations de cette suite.
3. Prouver que pour tout entier naturel  $n$  non nul,

$$s_n = \frac{n}{n+1}$$

4. En déduire la limite de la suite  $(s_n)$ .

## EXERCICE 04

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = e^{-2x} + x$ .

1. Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'inéquation  $e^{-2x} < \frac{1}{2}$ .
2. Dresser le tableau de variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
3. Déterminer le nombre de zéros de la fonction  $f$ , en justifiant votre réponse.

CORRIGÉ EXERCICE 01

1a. Déterminer le signe du trinôme  $-8m^2 + 8m + 16$  de variable réelle  $m$ .

On pourrait passer par le discriminant, mais il y a plus rapide !

$$-8m^2 + 8m + 16 = -8(m^2 - m - 2) \stackrel{\text{racines évidentes}}{=} -8(m+1)(m-2)$$

Ses racines sont  $-1$  et  $2$  : comme son coefficient dominant est négatif, on obtient :

$m$	$-\infty$	$-1$	$2$	$+\infty$
$-8m^2 + 8m + 16$	$-$	$0$	$+$	$0$

1b. Déterminer les valeurs du réel  $m$  pour lesquelles l'équation  $mx^2 + 4x + 2(m-1) = 0$  d'inconnue  $x$  a au moins une solution.

Pour chaque valeur du réel  $m$ , on pose  $P_m(x) = mx^2 + 4x + 2(m-1)$  définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

Deux cas apparaissent :

- Si  $m = 0$  :  $P$  est une fonction affine. L'équation  $P(x) = 0$  devient  $4x - 2 = 0$  qui admet une solution (donc au moins une).
- Si  $m \neq 0$  :  $P$  est un trinôme de discriminant

$$\Delta_m = 16 - 8m(m-1) = -8(m^2 - m - 2)$$

$\Delta_m$  est le trinôme de la question 1a : on sait alors que  $P_m$  admet au moins une racine ssi son discriminant  $\Delta_m$  est positif ou nul donc ssi  $m \in [-1; 2]$  (pour  $m \neq 0$  rappelons-le).

Ces deux points réunis donnent finalement comme ensemble de solutions pour  $m$ ,  $S = [-1; 2]$ .

2. Soit  $a$  et  $b$  deux réels tels que :  $-3 \leq a \leq 2$  et  $1 \leq b \leq 5$ .

Encadrer au mieux les nombres suivants :  $a^2$ ,  $a - 2b$  puis  $\frac{a^2}{b}$ .

- Attention, la fonction carré n'est pas croissante sur  $[-3; 2]$ . On peut juste dire que si  $-3 \leq a \leq 2$  alors  $0 \leq a^2 \leq 9$  ?
- Attention, on ne peut soustraire des inégalités, la stratégie est la suivante : multiplier par  $-2$  et ajouter. On a  $-3 \leq a \leq 2$  puis  $-10 \leq -2b \leq -2$  puis on peut additionner des inégalités rangées dans le même sens, ce qui donne :  $-13 \leq a - 2b \leq 0$ .
- Attention, on ne peut diviser des inégalités, la stratégie est la suivante : appliquer la fonction inverse (décroissante sur  $[1; 5]$ ), puis multiplier l'encadrement de  $a^2$  par celui de  $\frac{1}{b}$  (que des positifs). On a  $0 \leq a \leq 9$  puis, par décroissance de la fonction inverse sur  $[1; 5]$ ,  $\frac{1}{5} \leq \frac{1}{b} \leq 1$  et donc par produit,

$$0 \leq \frac{a^2}{b} \leq 9$$

3. Simplifier au maximum les nombres suivants :  $A = e^{-\ln 3}$  ;  $B = \frac{\ln 12 - \ln 6}{\ln 4}$

- $A = e^{-\ln 3} = \frac{1}{e^{\ln 3}} = \frac{1}{3}$
- $B = \frac{\ln 12 - \ln 6}{\ln 4} = \frac{\ln \frac{12}{6}}{\ln 2^2} = \frac{\ln 2}{2 \ln 2} = \frac{1}{2}$

4. Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}(n+3+u_n) \end{cases}$ .

4a. Montrer que la suite  $(v_n)$  définie par  $v_n = u_n - n - 1$  est une suite géométrique dont on donnera la raison. On a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - (n+1) - 1 = u_{n+1} - n - 2 = \frac{1}{2}(n+3+u_n) - n - 2 \\ &= \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{2}n - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(u_n - n - 1) = \frac{1}{2}v_n \end{aligned}$$

$(v_n)$  est donc suite géométrique de raison  $\frac{1}{2}$ .

4b. En déduire une expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .

- La suite  $(v_n)$  est géométrique de raison  $\frac{1}{2}$  et de premier terme  $v_0 = u_0 - 0 - 1 = 3$ . Ainsi,

$$v_n = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

- Par ailleurs,  $u_n = v_n + n + 1$  par définition, donc on a :

$$u_n = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + n + 1$$

4c. Exprimer d'une manière simple en fonction de l'entier naturel  $n$  la somme  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ .

Par linéarité de la somme, et utilisation des sommes de termes consécutifs de suites géométriques (ou arithmétiques)

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^k + \sum_{k=0}^n (k+1) = 3 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} + (n+1) \times \frac{n+2}{2}$$

5. Résoudre sur leur domaine les inéquations suivantes :

A.  $x^2 \leq 3x$  : Attention ! surtout ne pas diviser par  $x$ , on ne connaît pas son signe.

$x^2 \leq 3x \Leftrightarrow x(x-3) \leq 0$  :  $x(x-3)$  est un trinôme de racine 0 et 3, de coefficient dominant  $1 > 0$ , il est donc négatif à l'intérieur de ses racines. L'ensemble des solutions est :  $S = [0; 3]$

B.  $\frac{5x-5}{3-4x} \geq 1$  : Attention ! on ne multiplie pas des deux cotés par  $3-4x$ , on ne connaît pas son signe.

$\frac{5x-5}{3-4x} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{5x-5}{3-4x} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{9x-8}{3-4x} \geq 0$  : un produit est du signe d'un quotient, donc  $\frac{9x-8}{3-4x}$  est du signe du trinôme  $(9x-8)(3-4x)$ . Celui-ci, de racines  $\frac{3}{4} = \frac{27}{26}$  et  $\frac{8}{9} = \frac{32}{36}$ , a un coefficient dominant négatif, donc il est positif entre ses racines. Ainsi,  $S = ]\frac{3}{4}; \frac{8}{9}]$ .

C.  $x-1 < \frac{8}{x-1} \Leftrightarrow \frac{8}{x-1} - (x-1) > 0 \Leftrightarrow \frac{8-(x-1)^2}{x-1} > 0$

Déterminons le signe du trinôme au numérateur.

Plutôt que de développer, chercher le discriminant... trouvons directement les racines.

$$8 - (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 8 \Leftrightarrow x-1 = \pm\sqrt{8}$$

Ce trinôme a donc pour racines :  $1-2\sqrt{2}$  et  $1+2\sqrt{2}$ . Grâce à la même règle de signe que précédemment, on obtient alors :

$x$	$-\infty$	$1-2\sqrt{2}$		$1$		$1+2\sqrt{2}$		$+\infty$
$8 - (x-1)^2$	-	0	+		+	0	-	
$x-1$	-		-	0	+		+	
$\frac{8 - (x-1)^2}{x-1}$	+	0	-		+	0	-	

Ainsi,  $S = ]-\infty; 1-2\sqrt{2}[ \cup ]1; 1+2\sqrt{2}[$

**6. Dresser le tableau de variations complet des deux fonctions suivantes sur leur domaine de définition.**

Justifier précisément les limites des fonctions aux bornes de ces domaines.

$f(x) = xe^{-2x}$  sur  $\mathbb{R}$

$f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  de dérivée  $f'(x) = 1e^{-2x} + x(-2)e^{-2x} = e^{-2x}(1 - 2x)$  qui est du signe de  $1 - 2x$

$x$	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'$	$+$	$0$	$-$
$f$		$\frac{1}{2}e^{-1}$	
	$\nearrow$		$\searrow$
	$-\infty$		$0$

On a par ailleurs :

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  par produit («  $-\infty \times (+\infty)$  »)
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  par croissances comparées

$g(x) = \frac{\ln x}{x}$  sur  $]0; +\infty[$

$g$  est dérivable sur son domaine de dérivée  $g'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - 1 \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$  qui est du signe de  $1 - \ln x$ .

Etudions le signe du numérateur en résolvant par exemple

$x$	$0$	$e$	$+\infty$
$g'$	$+$	$0$	$-$
$g$		$e^{-1}$	
	$\nearrow$		$\searrow$
	$-\infty$		$0$

$1 - \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow x < e$

On a par ailleurs :

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$  par quotient («  $\frac{-\infty}{0^+}$ , qui n'est pas une F.I.»)
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$  par croissances comparées à nouveau

**CORRIGÉ EXERCICE 02**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$ .

**1. Démontrer que, pour tout réel  $x$  positif ou nul,  $e^{-x} \leq e^x$ .** Pour tout  $x \geq 0$ ,  $-x \leq x$  donc par croissance de la fonction  $\exp$  on a  $e^{-x} \leq e^x$ .

**2a. Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .** On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ , donc

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + e^{-x}) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}} = 0$  par quotient. Ainsi,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

**2b. Étudier les variations de  $f$  sur  $[0; +\infty[$ .**  $f$  est de la forme  $f = \frac{1}{v}$  avec  $v(x) = e^x + e^{-x}$  dérivable et ne

s'annulant pas sur  $[0; +\infty[$ , donc  $f$  est dérivable sur  $[0; +\infty[$  et  $f' = -\frac{v'}{v^2}$ . Par conséquent :

$$f'(x) = -\frac{e^x - e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{e^{-x} - e^x}{(e^x + e^{-x})^2}$$

D'après la question 1 : si  $x \geq 0$ , alors  $e^{-x} \leq e^x$ ; donc  $f'(x) \leq 0$ , pour tout  $x \geq 0$  :

$f$  est donc décroissante sur  $[0; +\infty[$ .

**3. On considère les fonctions  $g$  et  $h$  définies sur  $[0; +\infty[$  par  $g(x) = \frac{1}{e^x}$  et  $h(x) = \frac{1}{2e^x}$ .**

**3a. Démontrer que, pour tout réel  $x$  positif ou nul,  $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ .**

- Pour tout  $x$ ,  $0 < e^{-x}$  donc en ajoutant  $e^x$  à chaque membre on trouve  $e^x \leq e^x + e^{-x}$
- D'après Q1, pour  $x \geq 0$ ,  $e^{-x} \leq e^x$  donc en ajoutant  $e^x$  à chaque membre,  $e^x + e^{-x} \leq 2e^x$ .

Ainsi,  $0 < e^x \leq e^x + e^{-x} \leq 2e^x$  par décroissance de la fonction inverse sur  $]0; +\infty[$ ,

$\frac{1}{e^x} \geq \frac{1}{e^x + e^{-x}} \geq \frac{1}{2e^x} > 0$ . On a donc bien  $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ , pour tout réel  $x$  positif ou nul.

**3b.** Préciser une équation de la tangente ( $T$ ) à  $\Gamma$  au point d'abscisse 0. On a  $f'(0)=0$ , donc la tangente ( $T$ ) à  $\Gamma$  au point d'abscisse 0 est parallèle à l'axe des abscisses et a pour équation :  $y=f(0)$ , soit  $(T) : y=\frac{1}{2}$ .

**CORRIGÉ EXERCICE 03**

On considère la suite définie, pour tout entier naturel non nul, par  $s_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k(k+1)}$

**1.** Calculer et simplifier  $s_1, s_2$  et  $s_3$ .

- $s_1 = \sum_{k=1}^{k=1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2}$
- $s_2 = \sum_{k=1}^{k=2} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$
- $s_3 = \sum_{k=1}^{k=3} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

**2.** Etudier les variations de cette suite. D'après la relation de Chasles,

$$s_{n+1} - s_n = \sum_{k=1}^{k=n+1} \frac{1}{k(k+1)} - s_n = \underbrace{\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k(k+1)}}_{s_n} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} - s_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$$

Cette suite est donc croissante.

**3.** Prouver que pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $s_n = \frac{n}{n+1}$

Soit  $P(n) : « s_n = \frac{n}{n+1} »$  pour tout entier naturel  $n$  non nul.

- $s_1 = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$  donc  $P(1)$  est vraie
- Supposons que pour un rang  $n$  on ait  $s_n = \frac{n}{n+1}$ .

D'après Q2, on sait que  $s_{n+1} = s_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$  donc par hypothèse de récurrence,

$$s_{n+1} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2 + 2n + 1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$$

La proposition  $P(n+1)$  est donc vraie.

**4.** En déduire la limite de la suite ( $s_n$ ). En  $+\infty$ , la limite de cette fonction rationnelle est celle du quotient de ses termes de plus haut degré, à savoir,  $\frac{n}{n} = 1$  : ainsi,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k(k+1)} \right) = 1$

**CORRIGÉ EXERCICE 04**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = e^{-2x} + x$ .

**1.** Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'inéquation  $e^{-2x} < \frac{1}{2}$ . Par croissance (stricte) du logarithme,

$$e^{-2x} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow -2x < -\ln 2 \Leftrightarrow x > \frac{\ln 2}{2}$$

## 2. Dresser le tableau de variations de $f$ sur $\mathbb{R}$ .

- $f$  est dérivable de dérivée  $f'(x) = -2e^{-2x} + 1$
- Etudions par exemple l'inéquation  $f'(x) > 0$  :

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -2e^{-2x} + 1 > 0 \Leftrightarrow 2e^{-2x} < 1 \Leftrightarrow e^{-2x} < \frac{1}{2}$$

D'après Q1, on obtient alors

$x$	$-\infty$	$\frac{\ln 2}{2}$	$+\infty$
$f'$	-	0	+
$f$	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$
		$\frac{1+\ln 2}{2}$	

- Par somme,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  («  $0 + \infty$  »)
- En  $-\infty$  :  $f(x) = e^{-2x} + x = e^{-2x}(1 + xe^{2x})$ .  
Par croissances comparées,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{2x} = 0$  donc par produit,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ .

3. Déterminer le nombre de zéros de la fonction  $f$ , en justifiant votre réponse. Comme  $\frac{1+\ln 2}{2} > 0$ ,  $f$  est minorée par un réel strictement positif donc elle ne s'annule pas.