

Devoir Surveillé 01 – ECS1

Durée : 3h

Calculatrice interdite.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire l'usage d'aucun document : seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Exercice 01

Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \frac{1}{6} + \frac{6}{8} + \frac{5}{9} ; B = \frac{\frac{4}{25} - \frac{6}{35}}{\frac{3}{10} + \frac{1}{15}} ; C = \left(\frac{3}{2} - \frac{5}{4}\right) \times \left(\frac{9}{4} + \frac{21}{6}\right) ; D = \frac{(-18)^7 \times 2^4 \times (-50)^3}{(-25)^4 \times (-4)^5 \times (-27)^2}$$

Exercice 02

Résoudre dans \mathbb{R} ou un sous-ensemble, les (in)équations suivantes :

$$(I_1) : \frac{5x-2}{4-6x} \geq 0 ; (I_2) : \frac{1}{x-2} > \frac{1}{x+2} ; (I_3) : x^3 + 5x^2 < 6x$$

$$(E_1) : \ln(3x+2) - \ln(1-5x) = 0 ; (E_2) : 7x^2 + 7x = 14 ; (E_3) : e^x + e^{-x} - 6 = 0$$

Exercice 03

Sans vous préoccuper du domaine de dérivation, dérivez les fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{3-2x}{x^2} ; g(x) = e^{\frac{1}{1-x}} ; h(x) = x \ln(3x^2 + 2)$$

Problème 01

On considère la suite $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} v_0 = 1/4 \\ v_{n+1} = \frac{2v_n}{(n+3)v_{n+1}} \end{cases}$.

1. Prouver que la suite v est définie et à termes strictement positifs.
2. On pose, pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{1}{v_n}$. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n (et de n).
3. On pose, pour tout entier naturel n , $w_n = u_n - n - 1$. Montrer que la suite (w_n) est une suite de référence.
4. En déduire l'expression explicite de v_n en fonction de n .
- 5a. Déterminer la limite de la suite v .
- 5b. Déterminer une expression simplifiée de la somme $\sum_{k=2}^n u_k$.

Problème 02

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$: et on désigne par Γ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

1. Démontrer que, pour tout réel x positif ou nul, $e^{-x} \leq e^x$.
- 2a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
- 2b. Étudier les variations de f sur $[0; +\infty[$.
3. On considère les fonctions g et h définies sur $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{e^x}$ et $h(x) = \frac{1}{2e^x}$.
- 3a. Démontrer que, pour tout réel x positif ou nul, $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$.
- 3b. Préciser une équation de la tangente (T) à Γ au point d'abscisse 0.

Partie B : Soit (I_n) la suite définie sur \mathbb{N} par : $I_n = \int_n^{n+1} f(x)dx$.

1. Justifier l'existence de (I_n) , et donner une interprétation géométrique de I_n .
- 2a. Démontrer que, pour tout entier naturel n , $f(n+1) \leq I_n \leq f(n)$.
- 2b. En déduire que la suite (I_n) est décroissante.
- 2c. Cette suite est-elle convergente ? Déterminer sa limite.

Partie C : Soit (J_n) la suite définie sur \mathbb{N} par $J_n = \int_0^n f(x)dx$.

1. En utilisant l'encadrement obtenu dans la question A. 3. a., démontrer que, pour tout entier naturel n :
$$\frac{1}{2}(1 - e^{-n}) \leq J_n \leq 1 - e^{-n} \leq 1$$
2. La suite (J_n) converge-t-elle ?

Eléments de correction – DS01

Problème 01

On considère la suite $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} v_0 = 1/4 \\ v_{n+1} = \frac{2v_n}{(n+3)v_{n+1}} \end{cases}$.

1. Prouver que la suite v est définie et à termes strictement positifs. Raisonnons par récurrence et posons $P(n)$: « $v_n > 0$ » pour $n \in \mathbb{N}$.

- $v_0 = 1/4$ est bien strictement positif
- si au rang n on a $v_n > 0$ alors $(n+3)v_n + 1 > 0$, et en particulier il est non nul. Donc v_{n+1} existe et comme $v_{n+1} = \frac{2v_n}{(n+3)v_{n+1}}$, $v_{n+1} > 0$ comme quotient de deux réels strictements positifs.
- Ainsi, la suite v est à termes strictement positifs .

2. On pose, pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{1}{v_n}$. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n (et de n).

Pour tout entier naturel n on a

$$u_{n+1} = \frac{1}{v_{n+1}} = \frac{(n+3)v_n + 1}{2v_n} = \frac{n+3}{2} + \frac{1}{2v_n} = \frac{1}{2} \left(n+3 + \frac{1}{v_n} \right) \Leftrightarrow \boxed{u_{n+1} = \frac{1}{2}(n+3+u_n)}.$$

3. On pose, pour tout entier naturel n , $w_n = u_n - n - 1$. Montrer que la suite (w_n) est une suite de référence.

- Le calcul des premiers termes montre que cette suite semble être géométrique
- Pour tout entier naturel n on a

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= u_{n+1} - (n+1) - 1 = \frac{1}{2}(n+3+u_n) - (n+1) - 1 \\ &= \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{2}n - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(u_n - n - 1) = \frac{1}{2}w_n \end{aligned}$$

La suite w est donc géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $w_0 = 3$.

4. En déduire l'expression explicite de v_n en fonction de n .

- D'après Q3 on a $w_n = w_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n = 3 \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
- Comme $u_n = w_n + n + 1$ on trouve que $u_n = 3 \left(\frac{1}{2}\right)^n + n + 1$
- Comme $v_n = \frac{1}{u_n}$ on obtient finalement $\boxed{v_n = \frac{1}{3 \left(\frac{1}{2}\right)^n + n + 1}}$.

5a. Déterminer la limite de la suite v . Comme $-1 < \frac{1}{2} < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3(1/2)^n = 0$ et par somme puis quotient, $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0}$

5b. Déterminer une expression simplifiée de la somme $\sum_{k=2}^n u_k$. Par linéarité, et à l'aide des sommes de référence on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n (w_k + k + 1) &= \sum_{k=2}^n \underbrace{w_k}_{\text{géom.}} + \sum_{k=2}^n \underbrace{(k+1)}_{\text{arith.}} = w_2 \frac{1 - (1/2)^{n-1}}{1 - 1/2} + \frac{(n-1)(n+4)}{2} \\ &\Leftrightarrow \boxed{\sum_{k=2}^n u_k = 3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1 - (1/2)^{n-1}}{1 - 1/2} + \frac{(n-1)(n+4)}{2}} \end{aligned}$$

Problème 02

f définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$ et Γ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

A1. Pour tout $x \geq 0$, $-x \leq x$ donc par croissance de la fonction \exp on a $e^{-x} \leq e^x$.

A2a. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + e^{-x}) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}} = 0$ par quotient. Ainsi,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0}.$$

A2b. f est de la forme $f = \frac{1}{v}$ avec $v: x \mapsto e^x + e^{-x}$ dérivable et ne s'annulant pas sur $[0; +\infty[$, donc f est

dérivable sur $[0; +\infty[$ et $f' = -\frac{v'}{v^2}$. Par conséquent :
$$\boxed{f'(x) = -\frac{e^x - e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{e^{-x} - e^x}{(e^x + e^{-x})^2}}.$$

D'après la question 1 : si $x \geq 0$, alors $e^{-x} \leq e^x$; donc $f'(x) \leq 0$, pour tout $x \geq 0$:

f est donc décroissante sur $[0; +\infty[$.

A3. g et h définies sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{e^x}$ et $h(x) = \frac{1}{2e^x}$.

A3a.

- Pour tout x , $e^{-x} > 0$ donc $e^x \leq e^x + e^{-x}$
- Or pour $x \geq 0$, $e^{-x} \leq e^x$ donc $e^x \leq e^x + e^{-x} \leq 2e^x$

Ces quantités étant strictement positives, par décroissance de la fonction inverse $]0; +\infty[$,

$$\frac{1}{e^x} \geq \frac{1}{e^x + e^{-x}} \geq \frac{1}{2e^x} > 0.$$

On a bien $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$, pour tout réel x positif ou nul.

A3b. On a $f'(0) = 0$, donc la tangente (T) à Γ au point d'abscisse 0 est parallèle à l'axe des abscisses et a pour équation : $y = f(0)$, soit
$$\boxed{(T) : y = \frac{1}{2}}.$$

B1.

- La fonction f est dérivable donc continue sur $[0; +\infty[$; par suite f admet des primitives sur $[0; +\infty[$ et l'intégrale I_n existe pour tout entier naturel n .
- $f(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$, est positive (inverse d'un positif) sur $[0; +\infty[$. L'intégrale I_n représente donc l'aire (en u.a.) de la partie du plan limitée par la courbe Γ , l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = n$ et $x = n+1$.

B2a. La fonction f est décroissante sur $[0; +\infty[$. Il en résulte que, pour tout entier naturel n et tout réel $n \leq x \leq n+1$, on a $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$.

Par croissance de l'intégrale : $\int_n^{n+1} f(n+1) dx \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq \int_n^{n+1} f(n) dx$. Mais $f(n+1)$ et $f(n)$ sont des constantes par rapport à la variable x , on obtient alors par linéarité :

$$f(n+1) \times \int_n^{n+1} 1 dx \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq f(n) \times \int_n^{n+1} 1 dx, \text{ soit } f(n+1) \times [x]_n^{n+1} \leq I_n \leq f(n) \times [x]_n^{n+1}, \text{ ou encore}$$

$$f(n+1) \times [(n+1) - n] \leq I_n \leq f(n) \times [(n+1) - n].$$

■ On a bien $f(n+1) \leq I_n \leq f(n)$, pour tout entier naturel n .

B2b. Pour tout entier naturel n , $f(n+1) \leq I_n \leq f(n)$, donc $f(n+2) \leq I_{n+1} \leq f(n+1)$ et on en déduit $f(n+2) \leq I_{n+1} \leq f(n+1) \leq I_n \leq f(n)$. $I_{n+1} \leq I_n$ pour tout entier naturel n , donc la suite (I_n) est décroissante.

B2c.

- $f > 0$ sur $[0; +\infty[$; par positivité de l'intégrale, $I_n \geq 0$ pour tout entier naturel n . la suite (I_n) est décroissante et minorée (par 0), donc (I_n) converge en vertu du théorème de convergence monotone.
- Par ailleurs, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n+1) = 0$.
Comme $f(n+1) \leq I_n \leq f(n)$ (B2a), pour tout entier naturel n , d'après le théorème des gendarmes, la suite (I_n) converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

C1. Soit (J_n) la suite définie sur \mathbb{N} par : $J_n = \int_0^n f(x) dx$.

Comme $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$, pour tout réel x positif ou nul, par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^n h(x) dx \leq \int_0^n f(x) dx \leq \int_0^n g(x) dx$$

Or :

- $\int_0^n h(x) dx = \int_0^n \frac{1}{2e^x} dx = \int_0^n \frac{1}{2} e^{-x} dx = \frac{1}{2} \int_0^n e^{-x} dx = \frac{1}{2} [-e^{-x}]_0^n = \frac{1}{2} (-e^{-n} + 1)$.
- $\int_0^n g(x) dx = \int_0^n \frac{1}{e^x} dx = 2 \int_0^n h(x) dx = 1 - e^{-n}$

On a donc bien $\frac{1}{2}(-e^{-n} + 1) \leq J_n \leq 1 - e^{-n} \leq 1$, puisque $e^{-n} > 0$ pour tout entier naturel n .

C2. Prouvons que la suite $(J_n)_n$ converge.

- La question précédente nous montre qu'elle est majorée par 1, on va donc vérifier si elle est croissante.

$$J_{n+1} - J_n = \int_0^{n+1} f - \int_0^n f = \int_n^{n+1} f = \int_n^{n+1} f \text{ d'après la relation de Chasles.}$$

Mais f est positive sur \mathbb{R}^+ donc par positivité de l'intégrale, comme $n \leq n+1$, on en déduit que

$$\int_n^{n+1} f \geq 0 \text{ c\`ad que } J_{n+1} - J_n \geq 0 : \text{ la suite } (J_n)_n \text{ est bien croissante.}$$

- Etant majorée par 1, elle converge bien vers un réel $L \leq 1$.

Exercice 01

$$A = \frac{1}{6} + \frac{6}{8} + \frac{5}{9} = \frac{3}{18} + \frac{3}{4} + \frac{10}{18} = \frac{13}{18} + \frac{3}{4} = \frac{26}{36} + \frac{27}{36} = \frac{53}{36}$$

$$B = \frac{\frac{4}{25} - \frac{6}{35}}{\frac{3}{10} + \frac{1}{15}} = \frac{\frac{1}{5}(\frac{4}{5} - \frac{6}{7})}{\frac{1}{5}(\frac{3}{2} + \frac{1}{3})} = \frac{\frac{28-30}{35}}{\frac{9+2}{6}} = -\frac{2}{35} \times \frac{6}{11} = -\frac{12}{385}$$

$$C = \left(\frac{3}{2} - \frac{5}{4}\right) \times \left(\frac{9}{4} + \frac{21}{6}\right) = \frac{1}{4} \times \frac{69}{12} = \frac{69}{48} = \frac{23}{16}$$

$$D = \frac{(-18)^7 \times 2^4 \times (-50)^3}{(-25)^4 \times (-4)^5 \times (-27)^2} = \frac{2^7 3^{14} \times 2^4 \times 2^3 5^6}{-5^8 \times 2^{10} \times 3^6} = -\frac{2^{14} 3^{14} 5^6}{2^{10} 3^6 5^8} = -\frac{2^4 3^8}{5^2}$$

Exercice 02

$(I_1) : \frac{5x-2}{4-6x} \geq 0$: cette inéquation a un sens sur $\mathbb{R} - \left\{\frac{2}{3}\right\}$.

Ce quotient a le même signe que le produit, donc que le trinôme de racines $\frac{2}{5}$ et $\frac{2}{3}$. Ainsi $S = \left[\frac{2}{5}; \frac{2}{3}\right[$.

(I₂) : $\frac{1}{x-2} > \frac{1}{x+2}$: cette inéquation a un sens sur $\mathbb{R} - \{-2; 2\}$. « Passons tout du même côté » : on obtient

$$\frac{x+2-(x-2)}{(x+2)(x-2)} > 0 \Leftrightarrow \frac{4}{(x+2)(x-2)} > 0$$

Par la règle du signe d'un trinôme, on obtient alors $S =]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$.



Ps : surtout ne pas faire de produit en croix ! On ne connaît pas le signe de $x-2$ ou de $x+2$, donc on ne sait pas si le sens de l'inégalité change...

(I₃) : $x^3 + 5x^2 < 6x$: suivant la même problématique, on ne peut tout diviser par x !

$x^3 + 5x^2 < 6x \Leftrightarrow x(x^2 + 5x - 6) < 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+6) < 0$. Un tableau de signe donne alors :

$$S =]-\infty; -6[\cup]0; 1[$$

(E₁) : $\ln(3x+2) - \ln(1-5x) = 0$: les contraintes liées au domaine de cette équation sont $\begin{cases} x > -\frac{2}{3} \\ x < \frac{1}{5} \end{cases}$.

(E₁) $\Leftrightarrow \ln(3x+2) = \ln(1-5x) \Rightarrow 3x+2 = 1-5x \Leftrightarrow x = -\frac{1}{8}$ qui est bien dans le domaine



Ps : à priori, l'implication rouge n'est pas une équivalence puisque les deux équations (de droite et de gauche) n'ont pas le même domaine.

(E₂) : $7x^2 + 7x = 14 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$: trinôme de racines évidentes 1 et -2 .

(E₃) : $e^x + e^{-x} - 6 = 0 \Leftrightarrow e^x + \frac{1}{e^x} - 6 = 0 \Leftrightarrow \frac{(e^x)^2 - 6e^x + 1}{e^x} = 0$: et comme $e^x > 0$, en posant $X = e^x$, on retombe sur un trinôme de racines $X_1 = \frac{6-4\sqrt{2}}{2} > 0$ et $X_2 = \frac{6+4\sqrt{2}}{2}$

Or $\begin{cases} X = X_1 \\ X = X_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = X_1 \\ e^x = X_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln X_1 \\ x = \ln X_2 \end{cases}$. Donc $S = \{\ln(3-2\sqrt{2}); \ln(3+2\sqrt{2})\}$.

Exercice 03

$f(x) = \frac{3-2x}{x^2}$: appliquons $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-v'u}{v^2}$. Il vient $f'(x) = \frac{-2 \times x^2 - 2x \times (3-2x)}{x^4} = \frac{2x^2 - 6x}{x^4} = \frac{2x-6}{x^3}$

$g(x) = e^{\frac{1}{1-x}}$: appliquons en plus $(e^u)' = u'e^u$. Il vient $g'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} e^{\frac{1}{1-x}}$

$h(x) = x \ln(3x^2 + 2)$: appliquons $(\ln u) = \frac{u'}{u}$ et $(uv)' = u'v + uv'$. Il vient

$$h'(x) = 1 \times \ln(3x^2 + 2) + x \times \frac{6x}{3x^2 + 2}$$